乱れのH函数

巽, 友正; 池由, 紀人

乱 れ の H 函 数

巽　友正（京大理）
池田紀人（京大理）

（9月24日 受理）

§1. 乱れのH函数

乱れ（turbulence）は一般的にはつぎのように定義できる： 決定的方程式に従う一つの変数が与えられたとき、初期時刻におけるその変数の確率分布を仮定して、以後の任意の時刻における確率分布を求める。

非圧縮粘性流体の乱れにおいては、確率変数は速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$，方程式は Navier-Stokes 方程式で与えられる。非衝突プラズマの乱れにおいては、確率変数としては一体分布函数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$，方程式としては例えば Ulasov 方程式を考えればよいであろう。

乱れの不規則さ（randomness）を表わす重要な指標は、分布のH函数である：

$$H = \int P(\mathbf{X}) \log P(\mathbf{X})\, d\mathbf{X} \tag{1}$$

ただし、　$\mathbf{X}$：確率変数，　$P(\mathbf{X})$：分布密度。 H函数が時間的にどのように変化するかは、つぎのように方程式の形で表わされる。

まず、変数 $\mathbf{X}$ に対する決定的方程式を

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{Q}[\mathbf{X}] \tag{2}$$

と書けば、確率保存の関係から直ちに、分布 $P(\mathbf{X})$ に対する方程式

$$\frac{\partial P(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q}[\mathbf{X}]\right) P(\mathbf{X}, t) \tag{3}$$

が導かれる。この関係を(1)に代入すれば、直ちに、

$$\frac{dH}{dt} = -\int P(\mathbf{X}, t) \frac{\partial \mathbf{Q}[\mathbf{X}]}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \quad .$$

これがH函数の時間的変化を規定する方程式である。

§ 2. 流体における乱れ

流体の一様な乱れの速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ は Fourier 成分に分解することが出来て、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\kappa} \widetilde{\mathbf{u}}(\kappa)\, e^{i\kappa\cdot\mathbf{x}} .$$

いま、確率変数として $X=\widetilde{\mathbf{u}}(\kappa)$ ととれば、(2)式の右辺は Navier-Stokes 方程式と連続の式から

$$Q\,[\widetilde{\mathbf{u}}(\kappa)] = -i\sum_{\kappa'} (\kappa'\cdot\widetilde{\mathbf{u}}(\kappa-\kappa'))\,[\widetilde{\mathbf{u}}(\kappa') - \frac{\kappa}{\kappa^2}(\kappa\cdot\widetilde{\mathbf{u}}(\kappa')] - \nu\kappa^2\,\widetilde{\mathbf{u}}(\kappa) \tag{5}$$

となる。このとき、(4)式は、

$$\frac{dH}{dt} = \nu\int \kappa^2 P(\widetilde{\mathbf{u}}(\kappa), t)\, d\widetilde{\mathbf{u}}(\kappa) \geq 0 \tag{6}$$

となり、$\nu \neq 0$ である限り、H函数は時間とともに単調に増加する。すなわち流体における乱れの不規則さは時間とともに減少するという結論に導く。ここで断つておかなければならないのは、この結論はいわゆるエントロピー増大(H函数減少)の原理と矛盾するものではないということである。乱れた状態にある流体の分子運動に付随するH函数は、熱的なH函数と乱れのH函数との和で表わされ、前者の減少が後者の増加を上回ることによつて、熱力学の第2法則は保たれるのである。

§ 3. プラズマにおける乱れ

非衝突プラズマにおける一体分布函数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ は場の状態が統計的に一様である場合には Fourier 級数に展開することができる。

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sum_{\kappa}\sum_{\chi} \widetilde{f}(\kappa, \chi)\, e^{i(\kappa\mathbf{x} + \chi\cdot\mathbf{v})} .$$

プラズマの乱れにおいては、$X=\widetilde{f}(\kappa, \chi)$ を考えるのが適当であるが、このと

き(2)式の右辺は、 f(**x**, **v**) に対する Vlasov 方程式から、つぎのようになる：

$$Q[\tilde{f}(\kappa, \chi)] = -i\sum_{\chi'}(\kappa, \chi-\chi') + \frac{ie}{m}\sum_{\kappa'}(\chi\cdot\tilde{\mathbf{E}}(\kappa'))\tilde{f}(\kappa-\kappa', \chi) \tag{7}$$

ただし

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{\kappa}\tilde{\mathbf{E}}(\kappa)\, e^{i\kappa, \mathbf{x}}$$

$$\mathbf{v} = \sum_{\chi}\tilde{\mathbf{v}}(\chi)\, e^{i\chi, \mathbf{v}}$$

(7)式を(4)式に代入して右辺を計算してみると

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

という結果が得られる。これは、非衝突プラズマ（Vlasovプラズマ）では乱れの不規則さは初期に与えられた値のままで、増加も減少もしないということを意味する。このことは、Vlasov 方程式が空間的平均化によつて得られる以前のKlimontovich 方程式において、H函数が保存されることから見て、矛盾のない結果であるといえる。

§4. 議　論

流体における乱れでは、粘性のある限り乱れの不規則さは減少し、非衝突プラズマでは、乱れの不規則さは不変であることがわかつた。このことは、流体およびプラズマにおける場の不安定性，乱れの発生という問題と、乱れの不規則さとの間に、一見想定され勝ちな関係が実は存在しないということを意味している。一言にしていえば、乱れは場の複雑さ（complexity）を増しはするが、不規則さ（ramdomness）は増さないのである。